第 41 卷 第 2 期
2024 年 4 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 41 No. 2
Apr. 2024

文章编号:1000-4939(2024)02-0382-10

圆柱结构中的环向 SH 波及洞体内表面波不存在性讨论

邓良玉,曹小杉,汝艳

(西安理工大学土木建筑工程学院工程力学系,710048 西安)

摘　要:目前有关圆柱结构中的环向 SH 波研究仅限于实心柱体与圆柱壳体结构。由于无法直接获得圆柱洞体中传播的 SH 表面波的解析解,对比研究了实心柱体和多种不同类型的圆柱壳体中的环向 SH 波,从波结构、应变能密度幅值分布与壳体厚度的关系讨论洞体内 SH 表面波的存在性。建立柱坐标系下均匀弹性材料与功能梯度材料环向 SH 波的波动方程;分别求得方程的贝塞尔函数解和幂级数渐近解;进一步计算得到其频散曲线、波结构与应变能密度幅值。结果表明:幂级数方法可用于计算圆柱型结构中的变系数波动方程,且具有较高的精度;圆柱型结构中环向 SH 波的能量集中在外表面或次外表面,并随着壳体厚度的增加,能量集中现象更为明显;通过应变能密度幅值分布规律推论出圆柱洞体内表面无法传播环向 SH 表面波。最后,针对均质结构和梯度结构,采用反证法证明了无法得到满足洞体内 SH 表面波衰减条件的解析解,从而证明了该推论。

关键词:环向 SH 波;贝塞尔函数;幂级数渐近解;波结构;应变能密度

中图分类号:O34　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.02.012

SH waves in cylindrical structures and discussion on the nonexistence of circumferential SH surface wave in cylindrical cavities

DENG Liangyu, CAO Xiaoshan, RU Yan

(Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, 710048 Xi'an, China)

Abstract: Considering that research of circumferential horizontal shear wave (SH wave) has been published on the solid cylinders and cylindrical shell structures, aiming to discuss the existence of SH surface waves on the cylindrical cavity. Since it is impossible to directly obtain the analytical solution of SH surface wave propagating in cylindrical cavity, we compare the tendency of wave structures, strain energy density varying along thickness of SH waves on the surface of cylinders and various cylindrical shells. The governing equation of SH wave of homogeneous elastic material and functionally graded

收稿日期:2022-02-01　　**修回日期**:2022-06-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11572244);陕西省自然科学基金资助项目(No. 2021JQ-467);陕西省基金重点项目(No. 2021JZ~47)

通信作者:曹小杉,教授。E-mail:caoxsh@xaut.edu.cn.

引用格式:邓良玉,曹小杉,汝艳.圆柱结构中的环向 SH 波及洞体内表面波不存在性讨论[J].应用力学学报,2024,41(2):382-391.

DENG Liangyu, CAO Xiaoshan, RU Yan. SH waves in cylindrical structures and discussion on the nonexistence of circumferential SH surface wave in cylindrical cavities[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(2):382-391.

material in cylindrical coordinate system is established. The Bessel functions solution and the power series asymptotic solution of the governing equations of homogeneous elastic materials and functionally graded materials are obtained, respectively. Furthermore, the dispersion curves, the wave structures and the strain energy density are calculated. The results show that the power series method can be employed for solving wave governing equations with variable coefficients with high accuracy, the energy of circumferential SH waves in cylindrical structures is concentrated on the outer surface or subsurface, and the phenomenon of energy concentration is more obvious along thickness. It can be deduced from the distribution of strain energy density that the circumferential SH surface wave cannot propagate in the cylindrical cavity. Finally, for homogeneous material structure and functionally graded material structure, the inverse method is used to prove that any analytical solution cannot satisfy the attenuation condition of SH surface wave in the cavity.

Key words: circumferential SH wave; bessel function; asymptotic solution of power series method; wave structure; strain energy density

随着无损检测与超声器件应用需求的增加,多种材料、不同结构中的表面波与体波得到广泛关注。涉及的材料类型有弹性材料[1]、压电材料[2]、压电压磁材料[3]、压电半导体材料[4]等;也涉及均匀材料[5]、功能梯度材料[6];结构包括平面[7]、圆柱[8]、球体[9]、椭圆柱[10]、双曲柱结构[11]等。对于圆柱壳体中的 SH 波,研究者相继分析了壳体径厚比与弹性常数对 SH 波频散的影响[12-13]。不同参数对 SH 衰逝波[14]的影响。随着材料技术发展,波动问题的相关研究也由均匀材料拓展至非均匀材料。如:非均匀空心圆柱中的瞬态波[15]、非均匀压电压磁板和圆柱中的波[16-19]等。

然而,关于柱体结构中的环向 SH 波研究仅限于实心圆柱体与空心圆柱壳。这些研究并未涉及无限厚洞体中的 SH 表面波传播,仅有部分关于 SH 波在圆形孔洞散射的研究[20],是方程不便于求解或者是这类波就不存在呢? 文献[10]针对椭圆柱壳中环向 SH 波,明确指出能量集中在外凸表面而非内凹表面。如果对于均匀壳体结构,能量也只能集中在圆柱壳体的外表面,那么对于非均匀壳体,情况又如何呢? 考虑到功能梯度材料(functionally graded material, FGM)是非均质材料的代表性材料,所以可以考虑模型中包含功能梯度材料,那么其层合结构中的 SH 波传播问题则具有一定的代表性。

功能梯度材料是一种组分沿某一方向连续变化的非均匀材料,根据材料组分的变化形式可分为幂律型、S 律型以及指率型[21]。研究功能梯度材料中的波动问题时,由于波动控制方程的复杂性,很难直接求得解析解。目前求解功能梯度材料中的波动问题,常用方法有解析方法和数值方法。常用的解析方法有 Legendre 级数法[22]、Wentzel-Kramers-Brillouin 法[23]、特殊函数法[24]和幂级数方法[25]等。除了解析的方法,数值解法也常用于求解功能梯度材料中的波动问题。目前常有的数值方法有传递矩阵法[26]、有限元方法[27-28]等。近年来,关于功能梯度材料及其结构中的导波传播得到进一步发展。YU 等[29]研究了初始应力对 FGM 圆柱中轴向波特性的影响。WU 等[30]则对初始受压的 FGM 圆柱中的轴对称波进行了研究,发现 FGM 空心圆柱的内外压差决定导波的频散。SHEN 等[31]发现 FGM 圆柱壳中环向 SH 波的截止频率近似于等差数列。ZHANG 等[32]采用具有更高精度的模型计算了黏弹性 FGM 圆柱中的周向导波。

本研究采用幂级数方法,研究圆柱型结构中环向 SH 波的传播问题,基于弹性力学基本方程,得到不同圆柱结构中均匀材料的贝塞尔函数解和功能梯度材料的幂级数渐近解。研究了圆柱结构中环向 SH 波沿径向的能量分布,从能量角度分析弹性波能否在无限厚洞体表面传播的问题,以期为超声无损检测提供理论基础。

1　基本方程

图 1 为几种典型圆柱型结构,其中(a)~(f)分别表示均匀圆柱体、功能梯度圆柱体、均匀圆柱壳、功能梯度圆柱壳、内渐变型圆柱壳与外渐变型圆柱壳。图中,圆柱体半径为 R;圆柱壳体的内外径分别是 R_a 和 R_b;内、外渐变型圆柱壳的层间处半径为 R;

功能梯度材料的材料参数沿径向变化，是坐标 r 的函数。设 SH 波沿环向传播，柱坐标系下位移函数表示为

$$u_r = 0, u_\theta = 0, w = w(r,\theta,t) \tag{1}$$

式中，u_r、u_θ、w 分别代表径向、周向和轴向的位移函数。由于基本方程形式仅与材料有关，下面的推导中，功能梯度材料中的各类物理量不用上标；而均匀材料中的物理量用上标 H 表示。

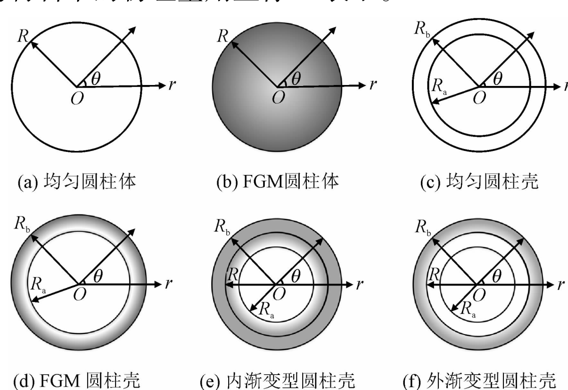


图 1 几种典型圆柱型结构

Fig. 1 Several typical cylindrical structures

柱坐标系下，应变分量与位移函数的关系可由几何方程得到

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r}, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{2}$$

式中，γ_{rz} 和 $\gamma_{\theta z}$ 分别表示 r-z 和 θ-z 方向上的剪切应变，其余方向上的剪切应变和正应变均为零。

材料的本构方程为

$$\tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \tag{3}$$

式中，τ_{rz}、$\tau_{\theta z}$ 代表两个剪切应力分量，其他应力分量为零；μ 是剪切模量，对于功能梯度材料，剪切模量 μ 为半径 r 的函数，即 $\mu = \mu(r)$。

SH 波在圆柱型结构中传播需满足运动方程，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} = \rho\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} = \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \tag{4}$$

式中，ρ 是材料密度，也是半径 r 的函数，即 $\rho = \rho(r)$；基于上述位移假设，前两个运动方程自动满足。

将式(2)和式(3)代入式(4)得到由位移函数表示的运动方程，即

$$\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial w}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{5}$$

如果材料为均匀材料，则运动方程退化为

$$\mu^H\frac{\partial^2 w^H}{\partial r^2} + \frac{\mu^H}{r^2}\frac{\partial^2 w^H}{\partial \theta^2} + \frac{\mu^H}{r}\frac{\partial w^H}{\partial r} = \rho^H\frac{\partial^2 w^H}{\partial t^2} \tag{6}$$

研究圆柱型结构中的环向 SH 波，位移函数除需满足式(5)或式(6)中所示的运动方程，还需满足表面应力自由边界条件、层间位移、应力连续边界条件或解的唯一性条件。对于不同圆柱型结构所需满足的条件不尽相同，考虑式(2)和式(3)，针对图 1 中的不同结构，可分别写出由位移表示的边界条件、连续性条件或解的唯一性条件。

圆柱体(图 1a ~ b)，均匀材料加上标 H

边界条件 $\left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$，唯一性条件 $w|_{r=0} = 0$

圆柱壳(图 1d ~ c)，均匀材料加上标 H

边界条件 $\left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=R_a} = 0, \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=R_b} = 0$

内渐变型圆柱壳(图 1e)，外渐变型圆柱壳类似

边界条件 $\left.\left(\mu\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)\right|_{r=R_a} = 0, \left.\left(\mu^H\dfrac{\partial w^H}{\partial r}\right)\right|_{r=R_b} = 0$

连续性条件 $w|_{r=R} = w^H|_{r=R}$，

$\left.\left(\mu\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)\right|_{r=R} = \left.\left(\mu^H\dfrac{\partial w^H}{\partial r}\right)\right|_{r=R}$

2 问题求解

对于功能梯度材料和均匀材料，SH 波环向传播的位移函数试探解可设为

$$\begin{cases} w(r,\theta,t) = \exp[i(kR\theta - \omega t)]W(r) \\ w^H(r,\theta,t) = \exp[i(kR\theta - \omega t)]W^H(r) \end{cases} \tag{7}$$

式中：$i = \sqrt{-1}$；k 是波数；ω 为频率；$W(r)$ 和 $W^H(r)$ 是待求的位移函数的幅值。

将试探解式(7)代入式(5)和式(6)，原偏微分方程可化简为常微分方程，即式(5)简化为

$$\frac{d\mu}{dr}\frac{dW}{dr} + \mu\frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{\mu(kR)^2}{r^2}W + \frac{\mu}{r}\frac{dW}{dr} = -\rho\omega^2 W \tag{8}$$

而式(6)简化为

$$\frac{d^2 W^H}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW^H}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)W^H = 0 \tag{9}$$

式中：W 是位移；$\alpha = kR$；$\beta = \sqrt{\rho^H/\mu^H}\omega$。

2.1 控制方程中位移函数的解析解

2.1.1 均匀材料中位移函数的贝塞尔函数解

式(9)是贝塞尔方程，其解为

$$W^{\mathrm{H}}(r)=C_1\mathrm{J}_\alpha(\beta r)+C_2\mathrm{Y}_\alpha(\beta r) \tag{10}$$

式中:J 是第一类贝塞尔函数;Y 是第二类贝塞尔函数; C_1 和 C_2 是待定常数。

2.1.2　功能梯度材料圆柱体中位移函数的幂级数解

令 $\hat{r}=r/R$,式(8)转化为

$$\left(\hat{r}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\hat{r}}+\mu\right)\hat{r}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\hat{r}}+\hat{r}^2\mu\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\hat{r}^2}+(\hat{r}^2\rho\omega^2-\mu k^2)R^2W=0 \tag{11}$$

设材料参数可写为幂级数的形式,即

$$\mu=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(1)}\hat{r}^n,\ \rho=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(2)}\hat{r}^n \tag{12}$$

如果材料参数变化规律确定, $b_n^{(1)}$ 和 $b_n^{(2)}$ 可以确定。

设式(11)可以用幂级数表示,即

$$W=\hat{r}^m\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{r}^n \tag{13}$$

式中, m 和 a_n 是待求解量。

将式(12)和(13)代入式(11)得到递推方程

$$\sum_{j=0}^{n}[(m+n-j)(m+n)-(kR)^2]b_j^{(1)}a_{n-j}\hat{r}^{n+m}=-R^2\omega^2\sum_{j=0}^{n}b_j^{(2)}a_{n-j-2}\hat{r}^{n+m} \tag{14}$$

令 $n=0$ 得到待求解量 m 的方程,即

$$b_0^{(1)}a_0[m^2-(kR)^2]=0 \tag{15}$$

解之得, $m=kR$ 。

对比递推方程中 $\hat{r}^{n+m}$ 的系数,得到决定 a_n 的递推级数方程,即

$$\sum_{j=0}^{n}[(m+n-j)(m+n)-(kR)^2]b_j^{(1)}a_{n-j}+R^2\omega^2\sum_{j=0}^{n}b_j^{(2)}a_{n-j-2}=0 \tag{16}$$

式中: a_{-1} 、 a_{-2} 都为0; a_0 为待定常数。由于式(16)中, a_n 的递推关系为线性关系,因此可以先对 a_0 赋值为1,然后由递推关系计算其他系数。

式(13)可等价为

$$W=C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{r}^{(n+kR)} \tag{17}$$

式中, C_1 为待定常数。对于其他 n 值, a_n 由式(16)确定。

2.1.3　功能梯度材料圆柱壳中位移函数幂级数解

令 $h=R-R_{\mathrm{a}}$, $\bar{r}=(r-R_{\mathrm{a}})/(R-R_{\mathrm{a}})=(r-R_{\mathrm{a}})/h$,式(8)转化为

$$\left(\bar{r}+\frac{R_{\mathrm{a}}}{h}\right)^2\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\bar{r}}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\bar{r}}+\left(\bar{r}+\frac{R_{\mathrm{a}}}{h}\right)^2\mu\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\bar{r}^2}-\mu(kR)^2W+\left(\bar{r}+\frac{R_{\mathrm{a}}}{h}\right)\mu\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\bar{r}}=-(\bar{r}h+R_{\mathrm{a}})^2\rho\omega^2W \tag{18}$$

设材料参数可写为幂级数的形式,即

$$\mu=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(3)}\bar{r}^n,\ \rho=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(4)}\bar{r}^n \tag{19}$$

如果材料参数变化规律确定, $b_n^{(3)}$ 和 $b_n^{(4)}$ 可以确定。

设式(18)的解也可用幂级数表示,即

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\bar{r}^n \tag{20}$$

将式(19)和式(20)代入式(18)中得到递推级数方程,对比递推级数方程中 $\hat{r}^n$ 的系数,得到决定 a_n 的递推级数方程

$$\left\{a_{n-j}[n(n-j)-(kR)^2]+a_{n-j+1}\frac{R_{\mathrm{a}}}{h}(n-j+1)\cdot(2n+1)+a_{n-j+2}\frac{R_{\mathrm{a}}^2}{h^2}(n-j+2)(n+1)\right\}\cdot\sum_{j=0}^{n}b_j^{(3)}+\omega^2\sum_{j=0}^{n}b_j^{(4)}(h^2a_{n-j-2}+2hR_{\mathrm{a}}a_{n-j-1}+R_{\mathrm{a}}^2a_{n-j})=0 \tag{21}$$

式中: a_{-1} 、 a_{-2} 都为0; a_0 、 a_1 为待定常数。

由于式(21)中, a_n 的递推关系为线性关系,为了求解递推级数方程中的待定常数,建立如下矩阵。

$$[a_{0j},a_{1j}]=\boldsymbol{I} \tag{22}$$

式中: $j=1,2$; $\boldsymbol{I}$ 为 2×2 的单位矩阵,则式(20)可等价为

$$W=C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_{n1}\bar{r}^n+C_2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n2}\bar{r}^n \tag{23}$$

式中, C_1 、 C_2 是待定常数。当 $n=0$ 和 $n=1$ 时, a_{nj} 由式(22)确定;对于其他的 n 值, a_{nj} 由式(21)确定。

2.2　不同结构中环向 SH 波的频散方程

将不同结构中位移函数的解析解代入相应的边界条件中,由 C_i 的系数矩阵行列式为0,即可得出相应的频散方程,即波数 k 与频率 ω 的关系。

2.2.1　均匀圆柱体

均匀圆柱体中波动控制方程的解为式(10)。第二类贝塞尔函数在 $r=0$ 时是发散的,由解的唯一性条件得到 $C_2=0$,由此得到

$$W^{\mathrm{H}}(r)=C_1\mathrm{J}_\alpha(\beta r) \tag{24}$$

式中, $\alpha=kR$, $\beta=\sqrt{\rho^{\mathrm{H}}/\mu^{\mathrm{H}}}\omega$ 。

得到频散方程为

$$\mathrm{J}_{\alpha-1}(\beta R)-\mathrm{J}_{\alpha+1}(\beta R)=0 \tag{25}$$

对于洞体情况,其中一个边界条件是衰减条件,即 $r\to\infty$时,位移为零。但由该边界条件无法得到两个待定常数 C_1 和 C_2 的关系,因此无法找到满足无穷远处衰减条件的贝塞尔函数解。

2.2.2 功能梯度圆柱体

功能梯度圆柱体中波动控制方程的解为式(17),由此得到频散方程,即

$$\mu C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+m)=0 \tag{26}$$

2.2.3 均匀圆柱壳

均匀圆柱壳中波动控制方程的解为式(10),令壳体外径 $R=R_{\mathrm{b}}$,内径为 R_{a},由此得到

$$W^{\mathrm{H}}(r)=C_1\mathrm{J}_{\alpha}(\beta r)+C_2\mathrm{Y}_{\alpha}(\beta r) \tag{27}$$

式中:$\alpha=kR_{\mathrm{b}}$,$\beta=\sqrt{\rho^{\mathrm{H}}/\mu^{\mathrm{H}}}\omega$。

则频散方程为

$$|Q_{ij}|=0,i=1,2,j=1,2 \tag{28}$$

式中

$$\begin{cases}Q_{11}=\mathrm{J}_{\alpha-1}(\beta R_{\mathrm{a}})-\mathrm{J}_{\alpha+1}(\beta R_{\mathrm{a}})\\ Q_{12}=\mathrm{Y}_{\alpha-1}(\beta R_{\mathrm{a}})-\mathrm{Y}_{\alpha+1}(\beta R_{\mathrm{a}})\\ Q_{21}=\mathrm{J}_{\alpha-1}(\beta R_{\mathrm{b}})-\mathrm{J}_{\alpha+1}(\beta R_{\mathrm{b}})\\ Q_{22}=\mathrm{Y}_{\alpha-1}(\beta R_{\mathrm{b}})-\mathrm{Y}_{\alpha+1}(\beta R_{\mathrm{b}})\end{cases}$$

2.2.4 功能梯度圆柱壳

功能梯度圆柱壳中波动控制方程的解为式(23),令壳体外径 $R=R_{\mathrm{b}}$,内径为 R_{a},由此得到

$$W=C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_{n1}\bar{r}^n+C_2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n2}\bar{r}^n \tag{29}$$

得到频散方程

$$|Q_{ij}|=0,i=1,2,j=1,2 \tag{30}$$

$$W=C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_{n1}\bar{r}^n+C_2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n2}\bar{r}^n$$

$$W^{\mathrm{H}}(r)=C_3\mathrm{J}_{\alpha}(\beta r)+C_4\mathrm{Y}_{\alpha}(\beta r)$$

式中:$Q_{11}=a_{11}$;$Q_{12}=a_{12}$;$Q_{21}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n1}$;$Q_{22}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n2}$。

2.2.5 内渐变型圆柱壳

内渐变型圆柱壳中内层波动控制方程的解为式(23),外层波动控制方程的解为式(10),令壳体外径 $R=R_{\mathrm{b}}$,内径为 R_{a},壳体的层间处半径为 R,由此得到

$$W=C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_{n_1}\bar{r}^n+C_2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n_1}\bar{r}^n$$

$$W^{\mathrm{H}}_{(r)}=C_3\mathrm{J}_{\mathrm{a}}(\beta_{\mathrm{r}})+C_4\mathrm{Y}_{\mathrm{a}}(\beta_{\mathrm{r}}) \tag{31}$$

式中,$\alpha=kR_{\mathrm{b}}$,$\beta=\sqrt{\rho^{\mathrm{H}}/\mu^{\mathrm{H}}}\omega$。

则频散方程为

$$|Q_{ij}|=0,\ i=1,4,\ j=1,4 \tag{32}$$

其中

$$\begin{cases}Q_{11}=a_{11},\ Q_{12}=a_{12}\\ Q_{23}=\mathrm{J}_{\alpha-1}(\beta R_{\mathrm{b}})-\mathrm{J}_{\alpha+1}(\beta R_{\mathrm{b}})\\ Q_{24}=\mathrm{Y}_{\alpha-1}(\beta R_{\mathrm{b}})-\mathrm{Y}_{\alpha+1}(\beta R_{\mathrm{b}})\\ Q_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n1}Q_{32}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n2}\\ Q_{33}=-\mathrm{J}_{\alpha}(\beta R),Q_{34}=-\mathrm{Y}_{\alpha}(\beta R)\\ Q_{41}=\dfrac{\mu}{R-R_{\mathrm{a}}}\sum_{n=0}^{\infty}na_{n1}\\ Q_{42}=\dfrac{\mu}{R-R_{\mathrm{a}}}\sum_{n=0}^{\infty}na_{n2}\\ Q_{43}=-\dfrac{\mu^{\mathrm{H}}\beta}{2}[\mathrm{J}_{\alpha-1}(\beta R)-\mathrm{J}_{\alpha+1}(\beta R)]\\ Q_{44}=-\dfrac{\mu^{\mathrm{H}}\beta}{2}[\mathrm{Y}_{\alpha-1}(\beta R)-\mathrm{Y}_{\alpha+1}(\beta R)]\end{cases}$$

其他项数为0。外渐变型圆柱壳的频散方程与内渐变型圆柱壳的类似,这里不再赘述。

3 数值算例及分析

3.1 材料参数

选用陶瓷和铬作为均匀弹性材料。陶瓷的材料参数为 $\rho_1^{\mathrm{H}}=3\,900\ \mathrm{kg/m^3}$,$\mu_1^{\mathrm{H}}=118.11\ \mathrm{GPa}$;铬的材料参数为:$\rho_2^{\mathrm{H}}=7\,190\ \mathrm{kg/m^3}$,$\mu_2^{\mathrm{H}}=102.5\ \mathrm{GPa}$[33]。

设功能梯度材料由陶瓷和铬复合而成,材料的体积分数沿径向变化,参数变化满足

$$\begin{cases}g^{(1)}(r)=g_1v_1(r)+g_2v_2(r)\\ g^{(2)}(r)=g_1v_3(r)+g_2v_4(r)\end{cases} \tag{33}$$

式中:$v_1+v_2=1$,$v_3+v_4=1$,$g^{(1)}(r)$ 和 $g^{(2)}(r)$ 分别为 FGM 圆柱体和 FGM 圆柱壳的材料参数;g_1 和 g_2 分别为陶瓷和铬的材料参数;v_1、v_2 表示体积分数。

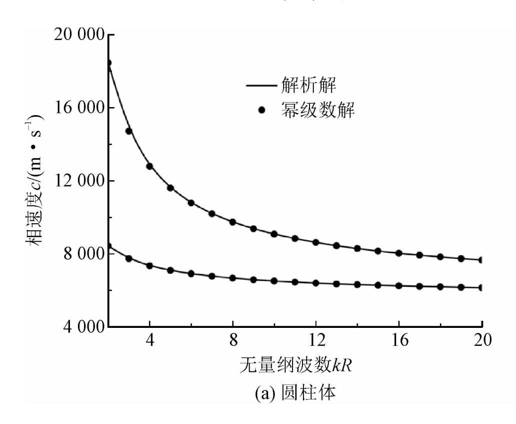
本研究的数值算例中设

$$v_1=\frac{r}{R},\ v_3=\frac{r-R_{\mathrm{a}}}{R_{\mathrm{b}}-R_{\mathrm{a}}}$$

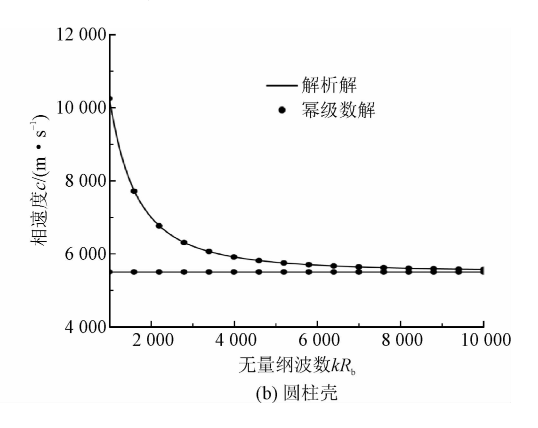
3.2 幂级数方法与解析解对比

对于均匀圆柱体和圆柱壳体中环向传播的 SH

波,均可以得到波动控制方程的解析解。将解析解和幂级数渐近解的频散曲线结果进行比较。图 2(a)给出了半径为 1 m 的均匀陶瓷圆柱体前两阶模态的相速度频散曲线。图 2(b)给出了内径为 0.998 m,外径为 1 m 的均匀陶瓷圆柱壳体前两阶相速度频散曲线。从图 2 中可以看到,采用幂级数渐近方法和解析解法求得的相速度曲线结果相同,从而验证了幂级数渐近方法的正确性。



(a) 圆柱体



(b) 圆柱壳

图 2　幂级数法与解析法结果比较

Fig. 2　Comparison of results between power series method and analytical method

3.3　相速度频散曲线

计算圆柱型结构中环向 SH 波前两阶相速度频散曲线,圆柱体与圆柱壳体的尺寸不变,内渐变型圆柱壳和外渐变型圆柱壳的内外径分别取为 0.996 m 和 1 m,层间半径为 0.998 m。

由图 3 可知:功能梯度圆柱体的相速度低于两个相应的均匀圆柱体的相速度;功能梯度圆柱壳的相速度则位于两个相应的均匀圆柱壳的相速度之间;内渐变型圆柱壳的相速度与内层陶瓷、外层铬的圆柱壳的相速度逐渐趋于一致;外渐变型圆柱壳的相速度则要大于内层陶瓷、外层铬的圆柱壳的相速度。

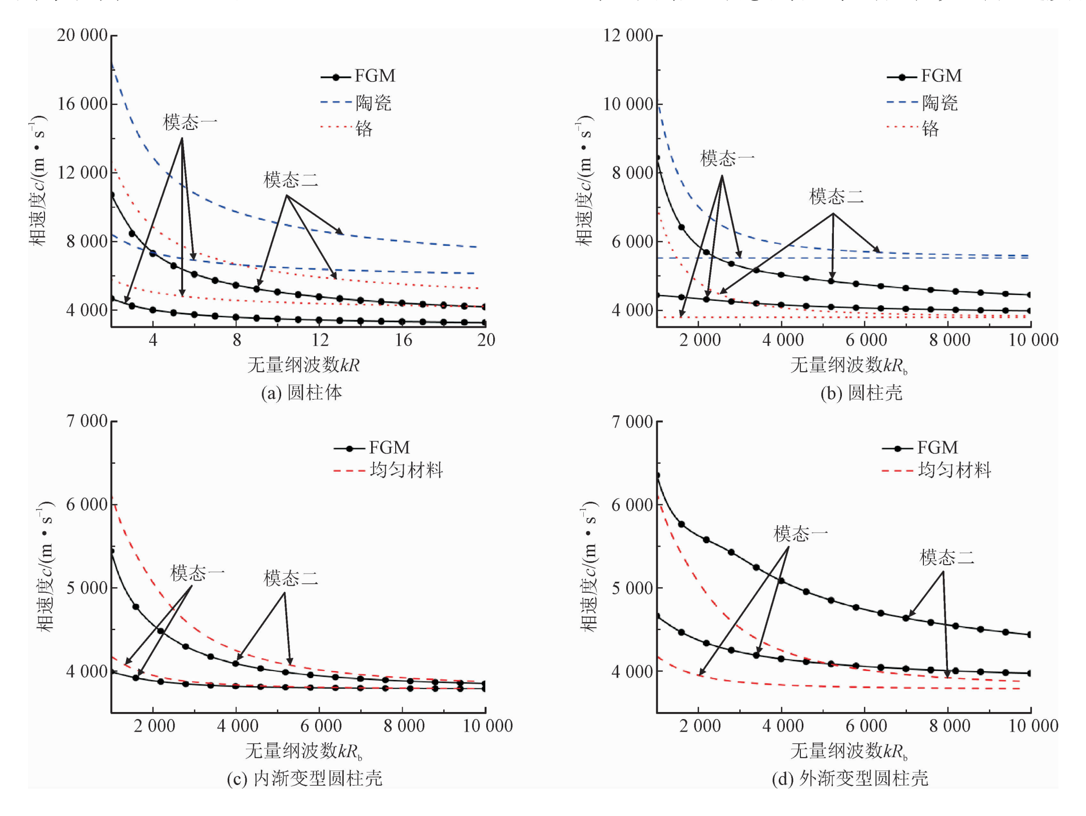


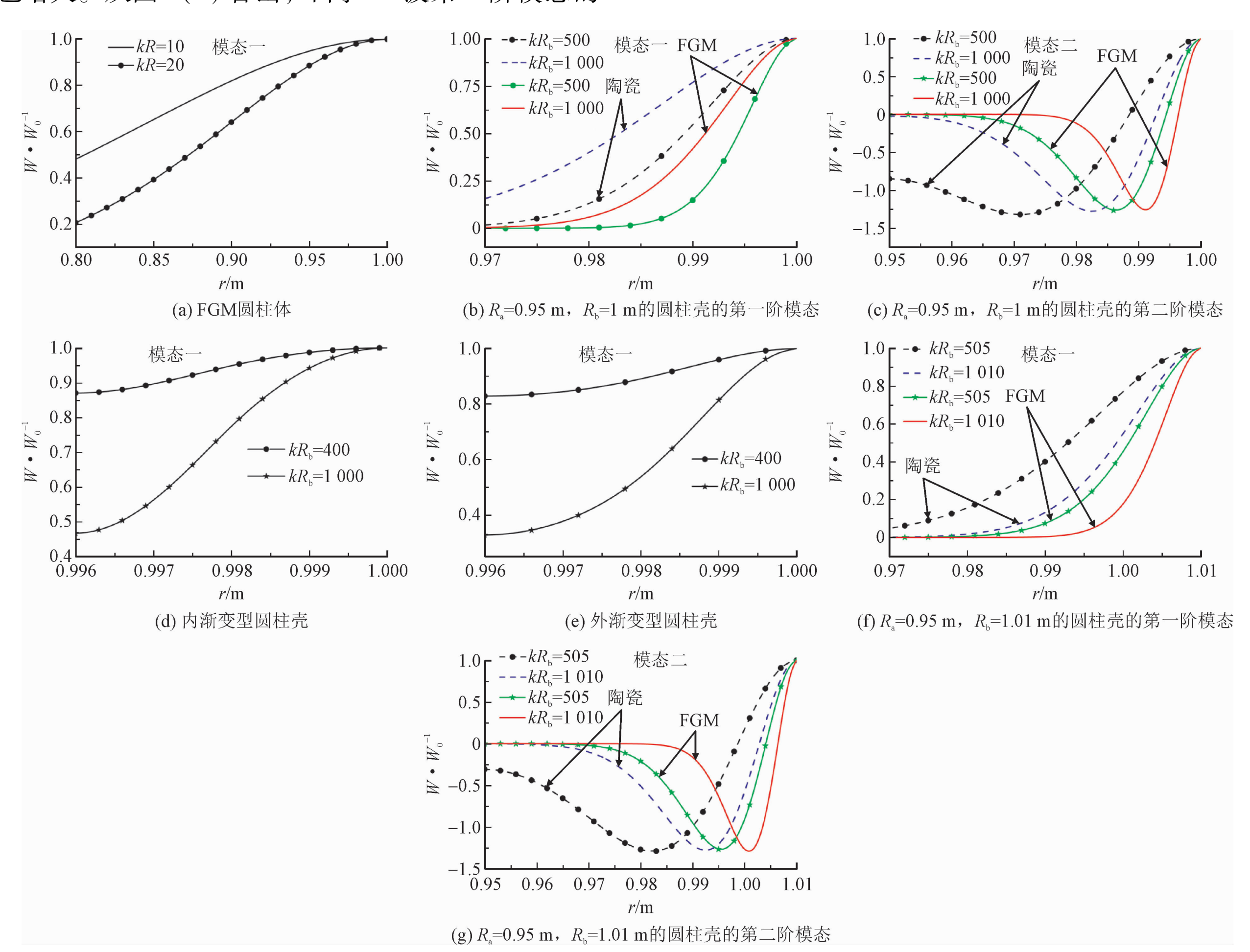
图 3　不同材料圆柱结构中环向 SH 波频散曲线对比

Fig. 3　Comparison ofdispersion curves of circumferential SH wave in cylindrical structures of different materials

3.4 位移幅值

下面讨论环向 SH 波沿径向的位移幅值分布。圆柱体半径为 1 m；圆柱壳内径为 0.95 m，外径为 1 m；内、外渐变圆柱壳的内径为 0.996 m，外径为 1 m，层间半径为 0.998 m。计算结果如图 4 所示，其中 W_0 为圆柱型结构外径的位移幅值。从图 4(a)、(b)、(d)、(e) 可以看出，圆柱型结构中环向 SH 波第一阶模态的位移幅值沿径向从内到外逐渐增大，并且随着波数的增大，内外两侧的位移幅值的差值也增大。从图 4(c) 看出，环向 SH 波第二阶模态的位移幅值则在外表面附近达到极值，随着波数的增大，极值越发向外表面靠近。也就是位移幅值更集中在圆柱型结构的外表面或次外表面。

为了讨论位移幅值与结构尺寸的关系，计算内径为 0.95 m，外径为 1.01 m 的圆柱壳环向 SH 波的位移幅值分布，结果如图 4(f)、(g) 所示，并与 (b)、(c) 进行比较，发现随着厚度的增加，环向 SH 波的位移幅值集中在外表面或次外表面的现象更加明显。综上推断 SH 波的能量集中在圆柱结构的外表面或次外表面。



(a) FGM圆柱体
(b) R_a=0.95 m，R_b=1 m的圆柱壳的第一阶模态
(c) R_a=0.95 m，R_b=1 m的圆柱壳的第二阶模态
(d) 内渐变型圆柱壳
(e) 外渐变型圆柱壳
(f) R_a=0.95 m，R_b=1.01 m的圆柱壳的第一阶模态
(g) R_a=0.95 m，R_b=1.01 m的圆柱壳的第二阶模态

图 4 不同圆柱结构环向 SH 波位移幅值比

Fig. 4 Displacement amplitude ratio of circumferential SH wave in different cylindrical structures

3.5 应变能密度幅值

前面从位移幅值的角度讨论了圆柱型结构中环向 SH 波的能量分布情况，得出了能量集中在结构外表面或次外表面的推断，下面从应变能密度幅值的角度出发，分析圆柱结构的能量分布。依据弹性力学的应变能密度公式

$$W^* = \frac{1}{2}(\tau_{rz}\gamma_{rz} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z}) \tag{34}$$

可以求得各圆柱型结构的应变能密度幅值，采用与计算位移幅值时相同的结构尺寸。计算结果如图 5 所示，其中 W_0^* 为圆柱型结构外径的应变能密度幅值。由图 5(a)、(b)、(d)、(e) 可知，与位移幅值相似，圆柱型结构环向 SH 波第一阶模态的应变

能密度幅值集中在结构的外表面，且随着波数的增加，这种集中现象更为明显。由图 5(c)看出，环向 SH 波第二阶模态应变能密度幅值在圆柱壳的次外表面取得极值，并且随着波数的增大，极值越靠近外表面。

对比不同厚度的圆柱壳，由图 5(b)、(c)、(f)、(g)可以看到，随着圆柱壳体厚度的增加，环向 SH 波第一阶和第二阶模态应变能密度幅值向圆柱壳体的外表面集中的现象越明显。所得结果与前面推测的环向 SH 波的能量分布是相符的。

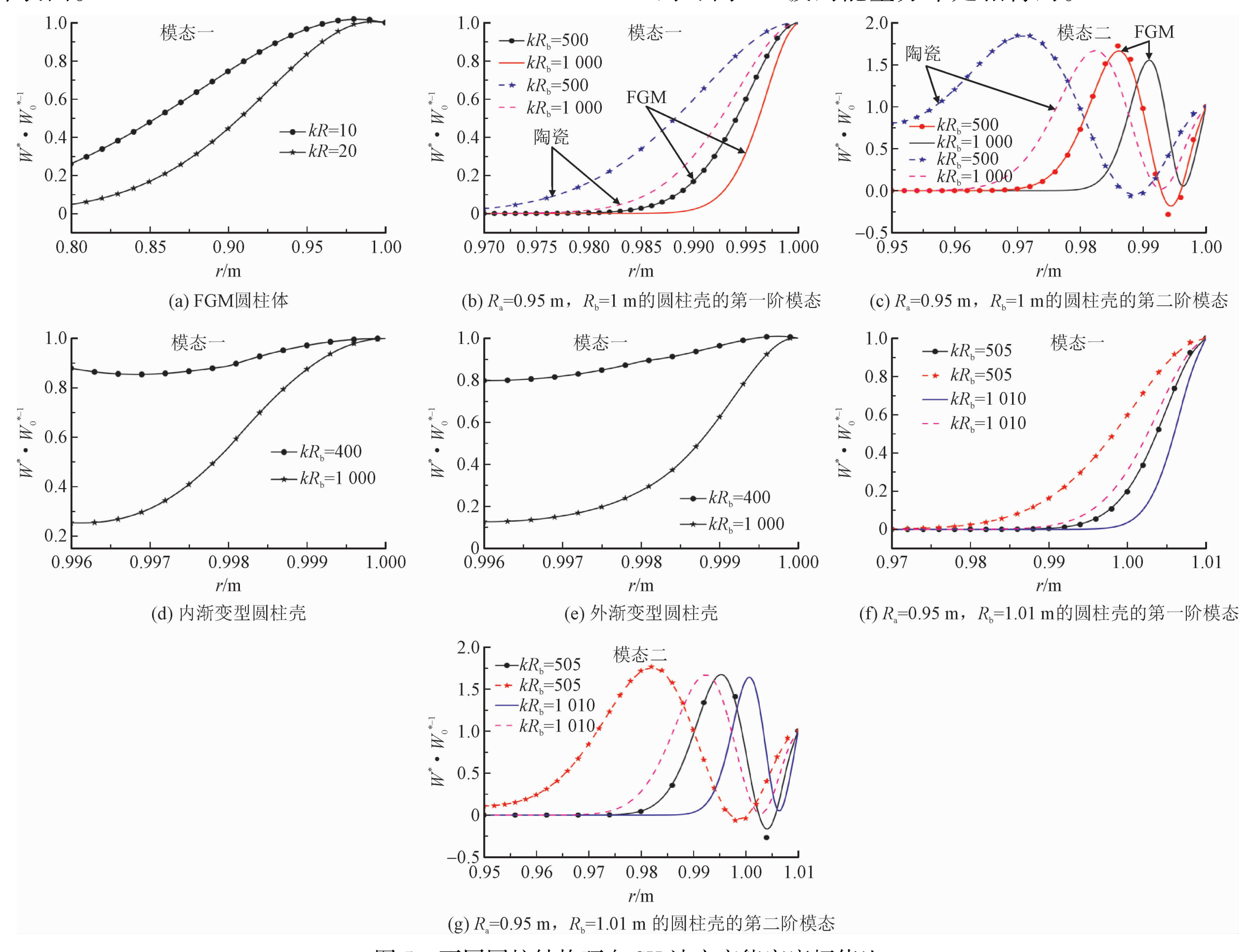


图 5　不同圆柱结构环向 SH 波应变能密度幅值比

Fig. 5　Strain energy density amplitude ratio of circumferential SH wave in different cylindrical structures

4　解的不存在性证明

柱坐标系下，环向传播的 SH 波场控制方程为式(9)，可采用反证法证明满足无限厚洞体内表面波传播的解的不存在。

假设解存在，则需满足衰减条件

$$r \to \infty \text{时}, \ W^H \to 0$$

采用坐标变换的方法，令 $x = 1/r$，场控制方程(9)变为

$$x^4 \frac{d^2 W^H}{dx^2} + x^3 \frac{dW^H}{dx} + (\beta^2 - \alpha^2 x^2) W^H = 0 \quad (35)$$

显然，当 $r \to \infty$ 时，即 $x \to 0$ 时，W^H 必须是小量，式(35)的前两项与 $-\alpha^2 x^2 W^H$ 均是 W^H 的高阶小量，而仅有 $\beta^2 W^H$ 是 W^H 的同阶小量，方程(35)满足。必须要求 $\beta^2 = 0$，显然不成立，因此假设不成立，方程无满足衰减条件的解。

同理，采用该坐标变换方法，对于功能梯度材料无限厚洞体，控制方程为式(8)，可以改写为

$$\mu x^3 \left(x \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{dW}{dx} \right) + x^4 \frac{d\mu}{dx} \frac{dW}{dx} + (\rho\omega^2 - x^2 \mu k^2 R^2) W = 0 \quad (36)$$

同样对比小量的阶数，可以得到满足衰减条件的解不存在。

另外，对于层合结构的无限厚洞体，无论内表面是何种材料，假设有 SH 环向表面波在洞体内表面传播，最外层(某一厚度处至无穷远处)通常简化为均匀材料或功能梯度材料。依据上述证明过程同样

可以证明无法找到满足衰减条件的解。因此可以得到无限厚洞体内表面无法传播环向 SH 表面波。

5 结 论

对于功能梯度实心圆柱体与壳体结构中环向 SH 波传播问题,均可以采用幂级数方法求得其渐近解析解,但由于边界条件不同,两者的幂级数解形式上有差异。通过与均匀材料相同结构中的环向 SH 波传播的贝塞尔函数解进行对比,验证了幂级数方法的精确性。进一步计算几种典型壳体结构的波结构与应变能密度,对比分析发现:环向 SH 波的能量集中在壳体结构的外表面或次外表面。当壳体厚度不变,波数越大,或者波数不变而壳体厚度增加,能量集中现象越明显。对于无限厚圆柱洞体,可以视作厚度无穷大的壳体,而洞体无穷远处的能量为零,与能量集中的外表面或次外表面的现象不符,所以推断圆柱洞体表面无法传播 SH 波。最后,从数学上严格证明了无法找到满足无穷远处衰减条件的控制方程的解,与本研究能量分析的结论一致。

参考文献:

[1] ACHENBACH J D. Wave propagation in elastic solids[M]. New York:Elsevier Publishing Company,1973.

[2] YU H C, WANG X D. Dispersion characteristics of wave propagation in layered piezoelectric structures:exact and simplified models[J]. Wave motion,2020,96:102559.

[3] EZZIN H,WANG B,QIAN Z H. Propagation behavior of ultrasonic love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation[J]. Mechanics of materials, 2020,148:103492.

[4] TIAN R, LIU J X, PAN E N, et al. SH waves in multilayered piezoelectric semiconductor plates with imperfect interfaces[J]. European journal of mechanics-a/solids,2020,81:103961.

[5] WANG X H, LI F L, YU J G, et al. Circumferential thermoelastic lamb wave in fractional order cylindrical plates[J]. Zamm-journal of applied mathematics and mechanics, 2021, 101 (5):e202000208.

[6] MAHANTY M, KUMAR P, SINGH A K, et al. On the characteristics of shear acoustic waves propagating in an imperfectly bonded functionally graded piezoelectric layer over a piezoelectric cylinder[J]. Journal of engineering mathematics, 2020, 120(1): 67-88.

[7] LIU C C, YU J G, XU W J, et al. Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory[J]. Thin-walled structures,2021,161:107527.

[8] SHARMA J N, SHARMA P K, MISHRA K C. Analysis of free vibrations in axisymmetric functionally graded thermoelastic cylinders[J]. Acta mechanica,2014,225(6):1581-1594.

[9] YU J G, LEFEBVRE J E, ELMAIMOUNI L. Toroidal wave in multilayered spherical curved plates[J]. Journal of sound and vibration,2013,332(11):2816-2830.

[10] CAO X S, JIA J, RU Y, et al. Asymptotic analytical solution for horizontal shear waves in a piezoelectric elliptic cylinder shell[J]. Acta mechanica,2015,226(10):3387-3400.

[11] CAO X S, JIA J, RU Y. Horizontal shear waves in a parabolic cylinder piezoelectric shell [C]//Proceedings of the 2014 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications. Piscataway,NJ,USA:IEEE,2014:335-339.

[12] 李勇攀,王寅观,赵亚军. 圆管中 SH 周向导波的频散特性[J]. 无损检测,2008,30(10):719-720.
LI Yongpan, WANG Yinguan, ZHAO Yajun. Dispersion of circumferential SH wave in a hollow cylinder[J]. Nondestructive testing,2008,30(10):719-720(in Chinese).

[13] 禹建功,吴斌. 正交各向异性空心圆柱体的周向 SH 波[J]. 声学技术,2009,28(3):208-211.
YU Jiangong, WU Bin. Circumferential SH wave in orthotropic hollow cylinders[J]. Technical acoustics, 2009, 28(3): 208-211 (in Chinese).

[14] 张小明,李智,禹建功. 正交各向异性圆柱板中周向衰逝导波频散特性[J]. 北京工业大学学报,2018,44(5):770-776.
ZHANG Xiaoming,LI Zhi,YU Jiangong. Dispersion characteristics of circumferential evanescent guided waves in orthotropic cylindrical curved plates [J]. Journal of Beijing University of Technology,2018,44(5):770-776(in Chinese).

[15] EL-RAHEB M. Transient waves in an inhomogeneous hollow infinite cylinder[J]. International journal of solids and structures, 2005,42(20):5356-5376.

[16] YU J G, MA Q J, SU S. Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinders[J]. Ultrasonics, 2008, 48 (8):664-677.

[17] WU B, YU J G, HE C F. Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic plates[J]. Journal of sound and vibration, 2008,317(1/2):250-264.

[18] GRIGORENKO A Y, LOZA I A. Axisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder made of a continuously inhomogeneous piezoelectric material[J]. International applied mechanics, 2017, 53(4):374-380.

[19] WANG X H, LI F L, ZHANG B, et al. Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical

integration orthogonal polynomial approach [J]. Applied mathematical modelling,2021,99:57-80.

[20] 吴红梅,欧志英. 纳米圆形孔洞 SH 波散射的复变函数解答[J]. 应用力学学报,2021,38(2):763-769.

WU Hongmei,OU Zhiying. Complex variable function solution for SH wave scattering in nano circular hole[J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(2):763-769(in Chinese).

[21] 崔鼎,郝南海. S-FGM 板的声振耦合特性研究[J]. 应用力学学报,2021,38(5):1974-1980.

CUI Ding, HAO Nanhai. Analysis of vibro-acoustic coupling characteristics of S-FGM plate [J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(5):1974-1980(in Chinese).

[22] ZHANG B,YU J G,ZHANG X M,et al. Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section [J]. Applied mathematical modelling, 2018, 63: 288-302.

[23] LI X Y,WANG Z K,HUANG S H. Love waves in functionally graded piezoelectric materials[J]. International journal of solids and structures,2004,41(26):7309-7328.

[24] COLLET B, DESTRADE M, MAUGIN G A. Bleustein-Gulyaev waves in some functionally graded materials[J]. European journal of mechanics-a/solids,2006,25(5):695-706.

[25] JIANG H N,CAO X S,SHI J P. Love wave in viscoelastic half space with sub-surface gradient damage[C]//2017 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA). Piscataway,NJ,USA:IEEE,2017:6-10.

[26] SHAHSAVARI H,TALEBITOOTI R,KORNOKAR M. Analysis of wave propagation through functionally graded porous cylindrical structures considering the transfer matrix method[J]. Thin-walled structures,2021,159:107212.

[27] GRAVENKAMP H, BIRK C, SONG C M. The computation of dispersion relations for axisymmetric waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method[J]. Ultrasonics,2014,54(5):1373-1385.

[28] 张小明,高安儒,王现辉,等. 基于有限元特征频率法的功能梯度矩形截面杆导波频散特性研究[J]. 应用力学学报,2021,38(5):2162-2167.

ZHANG Xiaoming, GAO Anru, WANG Xianhui, et al. Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded rectangular bars based on a finite element characteristic frequency method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(5):2162-2167(in Chinese).

[29] YU J G,ZHANG C. Influences of initial stresses on guided waves in functionally graded hollow cylinders[J]. Acta mechanica,2013,224(4):745-757.

[30] WU B,SU Y P,LIU D Y,et al. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders[J]. Journal of sound and vibration,2018,421:17-47.

[31] SHEN X Q,REN D W,CAO X S,et al. Cut-off frequencies of circumferential horizontal shear waves in various functionally graded cylinder shells[J]. Ultrasonics,2018,84:180-186.

[32] ZHANG X M,LI Z,WANG X H,et al. The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder[J]. Applied mathematical modelling,2021,89:299-313.

[33] CAO X S,JIN F,JEON I. Calculation of propagation properties of lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique[J]. NDT & E international,2011,44(1):84-92.

（编辑　吕茵）